

# Maths – Bio

---

## Transformée de Laplace

---

*Séance :*

Guillaume JEANNE

*Notes :*

Félix FOUTEL–RODIER

Séances des 23 et 29 janvier 2015

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La convolution</b>	<b>2</b>
2.1	Intuition sur les systèmes linéaires . . . . .	2
2.2	Un exemple : le porte à porte . . . . .	5
2.3	Propriétés du produit de convolution . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Laplace est dans la place</b>	<b>8</b>
3.1	Rappel : comment passer d'un '×' à un '+' . . . . .	8
3.2	Lier produit de convolution et produit . . . . .	11
3.3	Propriétés très générales . . . . .	12
3.4	Exemples usuels . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Applications et outils proches</b>	<b>15</b>
4.1	Résolution d'équations différentielles . . . . .	15
4.2	Transformée en Z . . . . .	16
4.3	Lien avec les probabilités . . . . .	17
4.4	Lien avec Fourier . . . . .	19

## 1 Introduction

Tout le monde a déjà dans sa vie rencontré une équation. Il s'agit tout simplement d'une égalité entre deux membres, qui nous donne des indications sur un objet (l'inconnue), qui nous décrit son comportement. Résoudre une équation n'est rien d'autre que trouver tous les objets qui se comportent de cette façon. Des exemples simples d'équations peuvent être :

$$2x^2 - 8 = 0$$

Ou encore :

$$f'' + f' = \cos$$

On voit tout de suite que bien qu'il s'agisse de deux équations, elles n'ont pas la même nature. On peut classer les équations en différentes catégories. Par exemple, la première équation est ce que l'on appelle une équation algébrique, son inconnue est un élément de  $\mathbb{C}$ , alors que la seconde est une équation différentielle, où l'inconnue est une fonction.

On ne dispose pas des mêmes outils pour résoudre ces différents types d'équations. En général, les équations algébriques sont plus simples à résoudre que les équations différentielles, même si ce n'est pas toujours le cas. La transformée de Laplace est un outil qui peut permettre de résoudre plus facilement certaines équations différentielles en les "transformant" en équations algébriques. Cette caractéristique l'a rendue très utilisée dans plusieurs branches de la physique, pour l'étude de systèmes dynamiques.

La transformée de Laplace ne se résume bien entendu pas qu'à son rôle dans la résolution d'équations. C'est un objet mathématique à part entière qui a été très étudié, et intervient dans bien d'autres domaines. Historiquement, on retrouve l'utilisation d'une forme similaire à la transformée de Laplace actuelle dans des travaux du célèbre Leonhard Euler, au XVIII<sup>e</sup> siècle. C'est cependant le scientifique Laplace qui donnera son nom à cette transformée, en utilisant une forme discrète appelée transformée en Z lors de ses travaux sur les probabilités. Son intérêt dans la résolution des équations différentielles n'arrive que bien plus tard, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, et serait dû à Oliver Heaviside, un ingénieur anglais. Il ne l'utilisait cependant que comme une "règle de calcul" pour simplifier les équations. La formalisation de l'outil a été réalisée encore plus tard, au début du XX<sup>e</sup> siècle.

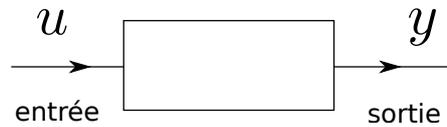
Nous allons ici essayer de redéfinir ce qu'est la transformée de Laplace, et donner ses propriétés les plus importantes. Nous allons l'aborder à l'aide d'une de ses caractéristiques, qui est de transformer un produit de convolution en produit. Mais alors une première question se pose : qu'est-ce que la convolution ?

## 2 La convolution

### 2.1 Intuition sur les systèmes linéaires

Dans la théorie du signal notamment, on peut appeler système une "entité" qui prend une ou plusieurs entrées, et qui ressort une ou plusieurs sorties. Par exemple, en biologie, on peut voir un neurone comme un système. On lui donne en entrée tous les flux d'ions provoqués par ses synapses, et le neurone ressort un pattern de potentiels d'action. Ou un autre exemple pourrait être les cellules  $\beta$  pancréatiques : on leur donne en entrée la glycémie au niveau du pancréas, et la cellule donne en sortie une quantité de molécules d'insuline sécrétées (une seule entrée et une seule sortie cette fois). Ce que l'on appelle système est en fait la modélisation d'un procédé, c'est une représentation théorique qu'on s'en fait pour pouvoir l'étudier.

Nous allons pour l'instant nous intéresser aux systèmes simples à une entrée et une sortie. On peut les représenter de cette façon :



Si le système possède certaines caractéristiques, on va pouvoir le classer dans des catégories. Les systèmes qui vont nous intéresser sont les systèmes dits linéaires. Pour qu'un système soit linéaire, il faut que si une entrée  $u$  donne une sortie  $y$ , et qu'une entrée  $v$  donne une sortie  $w$ , alors une entrée  $u + v$  donne une sortie  $y + w$ . De plus, il faut qu'une entrée  $\lambda u$  donne une sortie  $\lambda y$ . Par exemple, prenons le système qui, à la fin de l'année, calcule vos intérêts sur un compte bancaire à taux fixe : Si l'année d'après vous avez deux fois plus d'argent sur votre compte, vous aurez deux fois plus d'intérêts, et si vous mettez votre argent en commun avec un ami, vous gagnerez autant à deux que si vous aviez deux comptes séparés. Des exemples tirés de la biologie ne sont pas simples à trouver, car les systèmes linéaires sont assez simples, à l'opposé des systèmes biologiques plutôt complexes. Modéliser un procédé biologique par un système linéaire est souvent très réducteur et peu intuitif.

Ce qui nous intéresse pour accéder à la convolution va nécessiter une légère introduction à la théorie du signal. On appelle signal l'évolution dans le temps d'une grandeur. Un système va alors permettre de transformer ce signal en un autre signal. Par exemple, si l'on se place en temps discret et que l'on étudie la désintégration d'un atome radioactif, de constante de temps  $\tau$ . On peut considérer un système qui nous donne l'évolution au cours du temps d'une quantité initiale d'atomes. Dans ce cas, le signal d'entrée est, à chaque pas de temps, la quantité d'atomes radioactifs introduite dans le système, et la sortie est combien il reste d'atomes à chaque pas de temps. Imaginons que l'on mette une mole d'atomes au temps  $t = 0$  et qu'on la laisse évoluer. L'entrée est alors :

$$u : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 1 \\ k \mapsto 0 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

Et la sortie est simplement :

$$y : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ k \mapsto e^{-k/\tau} \text{ si } k \geq 0 \\ k \mapsto 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Si on met deux fois plus d'atomes au temps  $t = 0$ , la sortie sera tout simplement deux fois plus grande. De même, si on rajoute 2 moles dans le système à un autre temps, la sortie sera la somme des deux réponses élémentaires. Ce système est en fait linéaire. Rajouter 2 moles dans le système à  $t = 2$  revient à prendre comme fonction d'entrée :

$$v : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ k \mapsto 0 \text{ si } k \neq 0, 2 \end{cases}$$

On peut facilement exprimer  $v$  en fonction de  $u$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, v(k) = u(k) + 2u(k - 2),$$

et comme le système est linéaire, on peut calculer la réponse  $w$  à  $v$  en fonction de  $y$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, w(k) = y(k) + 2y(k - 2).$$

Ici,  $y$  est en fait ce que l'on pourrait appeler la "réponse élémentaire" du système, c'est la façon dont le système se comporte si on lui donne une entrée unitaire uniquement en 0. On voit bien que par le même raisonnement qu'au dessus, quelque que soit l'entrée, on va pouvoir écrire sa sortie uniquement en fonction de  $y$ . En fait, on peut même écrire :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, w(k) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} v(t)y(k - t),$$

où  $v$  est une entrée quelconque et  $w$  sa sortie. C'est cette opération que l'on nomme la convolution (dans le cas discret ici).

En faisant tendre le pas de temps vers 0, on obtient la formule de la convolution en temps continu :

$$w(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)y(k - t) dt$$

On note la convolution  $*$ . Ainsi, ici,  $w = v * y$ .

**Remarque :** lorsque l'on passe du discret au continu, l'entrée  $v$  et la réponse  $y$  ne sont plus les mêmes fonctions. Pour reprendre notre exemple en continu, le fait d'ajouter à un temps  $t$  une quantité d'atomes radioactifs revient à placer un Dirac<sup>1</sup> centré sur le temps  $t$ . Et la réponse  $y$  est en fait désormais la réponse à cette impulsion de Dirac, et serait une exponentielle décroissante partant de 0.

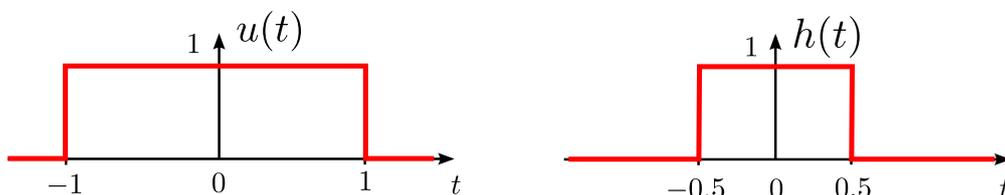
---

1. Informellement, on peut voir un Dirac en  $t$  comme une "fonction" qui vaut 0 partout, sauf en  $t$  où elle prend une valeur infinie de manière à ce que son intégrale sur  $\mathbb{R}$  vaille 1 – nous y reviendrons.

Nous avons maintenant vu ce qu'était la convolution. Dans un système linéaire, on est capables d'obtenir facilement les réponses à n'importe quelle entrée si on connaît la réponse du système à un signal "élémentaire" (la décroissance exponentielle dans notre exemple). L'opération qui permet de la trouver est alors la convolution. Voyons donc à présent un exemple plus précis de produit de convolution avant d'en étudier les caractéristiques.

## 2.2 Un exemple : le porte à porte

Un exemple de convolution assez classique est celui de la convolution par une porte. Une "porte" n'est rien d'autre qu'une fonction nulle sur  $\mathbb{R}$  sauf sur un intervalle où elle vaut 1. Par exemple, les fonctions  $u$  et  $h$  représentées ci-dessous sont deux portes.

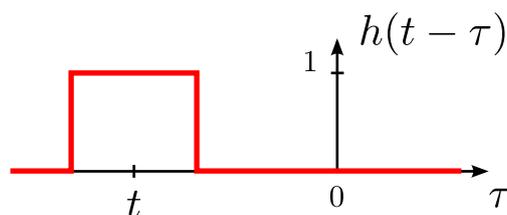


Intéressons nous à présent à la convolution de ces deux portes,  $y = u * h$ .

Par définition, on a :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

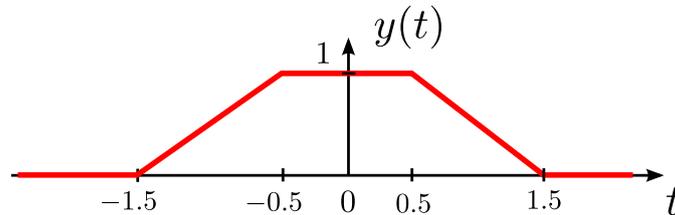
La représentation de  $\tau \mapsto h(t - \tau)$  est (attention ici  $t$  est un paramètre, et la variable est  $\tau$ ) :



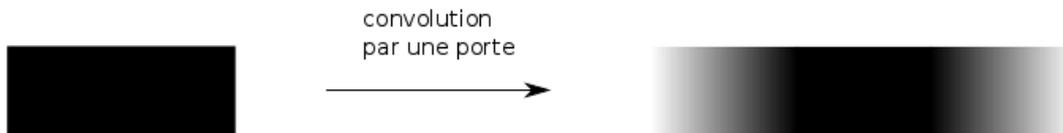
La fonction sous l'intégrale vaut 1 à l'intersection des deux supports<sup>2</sup>, et 0 partout ailleurs. La fonction  $y$  vaut alors la longueur de cette intersection. Ainsi quand  $t$  est trop petit,  $y$  vaut 0 puisque les deux supports sont disjoints.

2. Le support d'une fonction désigne l'ensemble des éléments de l'espace de départ pour lesquels elle n'est pas nulle.

Puis, quand  $t$  augmente, l'intersection devient non nulle, et sa longueur augmente linéairement jusqu'à  $t = -0.5$ , moment à partir duquel le support de  $\tau \mapsto h(t - \tau)$  est inclus dans celui de  $u$ . La longueur de l'intersection des deux supports reste alors constante égale à 1 jusqu'à ce que  $t = 0.5$ , ou elle rediminue linéairement jusqu'à ce que  $t = 1.5$ . Ainsi la représentation de  $y$  est :



Si on considère que  $y$  correspond à un niveau de blanc d'une image en 1D, si on fait passer une image initiale  $u$  par une porte  $h$ , on obtient une image  $y$  qui est floutée. Faire passer une image par une porte revient en fait à la flouter (ici le flou est "linéaire").



**Remarque :** Il existe d'autres méthodes pour flouter les images. Par exemple, on peut convoluer par autre chose que des portes : des bosses, etc.

À présent que nous avons vu un premier exemple de calcul de produit de convolution, il est temps de voir quelques caractéristiques de celui-ci.

## 2.3 Propriétés du produit de convolution

- (i) Commutativité :  $u * h = h * u$
- (ii) Associativité :  $(u * h) * g = u * (h * g)$
- (iii) Distributivité :  $u * (h + g) = u * h + u * g$

Il est assez naturel de se demander quand on définit une opération si celle-ci possède un élément neutre, c'est-à-dire si  $\exists e$  tq  $h * e = e * h = h$ . Pour commencer

à entrevoir la réponse, prenons une fonction particulière, par exemple pour un  $a$  dans  $\mathbb{R}$  considérons :

$$f_a : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On doit alors avoir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (f_a * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(\tau) e(t - \tau) d\tau = \int_{-a}^a e(t - \tau) d\tau = f_a(t)$$

En particulier, pour  $t = 0$ , comme  $\forall a \in \mathbb{R}, f_a(0) = 1$  on a :

$$\int_{-a}^a e(-\tau) d\tau = 1$$

En effectuant le changement de variable  $x = -\tau$  on a :

$$\int_{-a}^a e(x) dx = 1$$

Ceci est vrai pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . On voit bien qu'en faisant varier ce paramètre  $a$ , l'aire doit rester constante, donc sur tout segment ne contenant pas 0, l'aire doit être nulle, et ainsi la fonction elle aussi doit être nulle. Et pourtant, lorsque le segment comporte 0, l'aire doit valoir 1.

Notre élément neutre ressemblerait donc à une fonction nulle partout sauf en 0, où elle vaudrait l'infini, mais de telle manière que l'aire sous la courbe "en 0" reste de 1. Cet objet n'est en fait pas une fonction, car une fonction (réelle) ne peut pas prendre de valeur infinie en un point. Il s'agit d'un autre type d'objet mathématique, appelé *distribution*, qui généralise les fonctions.

Par ce raisonnement, on voit bien qu'il n'y a pas de fonction qui soit l'élément neutre de la convolution. On pourrait redéfinir la convolution sur les distributions, il existerait alors bien un élément neutre, qui est la distribution de Dirac, notée  $\delta$ . Un objet qui serait nul partout sauf en 0, et dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  vaudrait 1 serait élément neutre de la convolution, mais un tel élément n'existe pas parmi les fonctions.

Toutes les propriétés du produit de convolution qui viennent d'être présentées rappellent fortement celles du produit "classique". Il serait intéressant de trouver une manière de passer du produit de convolution au produit classique, et c'est là qu'intervient la transformation de Laplace...

Le point de vue adopté jusqu'ici est celui du traitement du signal, où on ne s'intéresse qu'à des fonctions nulles pour les temps négatifs. Ainsi par la suite on ne prendra plus que les intégrales sur  $\mathbb{R}_+$  pour cette raison.

### 3 Laplace est dans la place

Nous allons ici essayer de retrouver la transformée de Laplace à l'aide d'une de ses caractéristiques qui est de transformer les produits de convolution en produits classiques.

#### 3.1 Rappel : comment passer d'un '×' à un '+'

Bien que ce ne soit pas au coeur du débat, nous allons ré-expliciter rapidement pourquoi les fonctions permettant de passer d'une multiplication à une addition sont les logarithmes. Nous ne ferons pas la démonstration complète, et admettrons certaines petites propriétés. Cela constituera une bonne introduction pour ce qui vient.

Nous cherchons une fonction  $l$  telle que :

$$l(a.b) = l(a) + l(b) \tag{1}$$

Restreignons le domaine sur lequel on va étudier une telle fonction. Il est inintéressant de définir une telle fonction en 0 car, si  $l(0)$  existe :

$$\forall a \in \mathbb{R}, l(0) = l(0 \times a) = l(0) + l(a)$$

Donc,

$$\forall a \in \mathbb{R}, l(a) = 0$$

De plus, si on définit  $l$  sur  $\mathbb{R}^*$ ,

$$\forall a \in \mathbb{R}, l(-a \times -a) = 2l(-a) = l(a \times a) = 2l(a)$$

Cette fonction serait donc paire sur  $\mathbb{R}^*$ . On se place donc pour la suite sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrons maintenant qu'une telle fonction est un logarithme. Nous allons supposer que  $l$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En dérivant l'équation (1) par rapport à  $b$ , on a :

$$\forall a, a.l'(ab) = l'(b)$$

En particulier pour  $b = 1$  on a :

$$\forall a, a.l'(a) = l'(1), \quad \text{càd} \quad \forall a, l'(a) = \frac{l'(1)}{a}$$

C'est la définition d'un logarithme.

Nous supposons maintenant que  $l$  admet une réciproque, que l'on note  $e$ . On a alors :

$$e(l(ab)) = e(l(a) + l(b))$$

c'est-à-dire

$$ab = e(l(a) + l(b)),$$

ou encore

$$e(l(a)) e(l(b)) = e(l(a) + l(b)).$$

En notant  $l(a) = x$  et  $l(b) = y$ , on peut réécrire l'égalité précédente :

$$e(x) e(y) = e(x + y).$$

La réciproque d'un logarithme transforme donc une somme en produit. Pour la suite de la démonstration nous supposons que  $e$  est continue.

Montrons maintenant que les  $e$  sont des fonctions exponentielles, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e(x) = e(1)^x$$

Montrons au préalable que  $e$  est strictement positive : supposons que  $\exists x_0$  tel que  $e(x_0) = 0$ . Alors pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$e(x) = e(x + x_0 - x_0) = e(x - x_0).e(x_0) = 0$$

Donc  $e$  est identiquement nulle. Or on a défini  $e$  comme une réciproque, elle ne peut pas être identiquement nulle. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e(x) \neq 0$$

Supposons que  $\exists x \in \mathbb{R}$  tel que  $e(x) < 0$ . Par continuité, comme  $e$  n'a pas d'image nulle, elle est négative sur  $\mathbb{R}$  entier. Or :

$$e(0) = e(-x + x) = e(-x) e(x) > 0$$

Nous arrivons à une contradiction. Ainsi  $e$  est strictement positive.

Montrons désormais la propriété recherchée sur  $\mathbb{N}$ , puis sur  $\mathbb{Z}$ , puis sur  $\mathbb{Q}$  et enfin sur  $\mathbb{R}$ .

• Sur  $\mathbb{N}$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$e(n).e(1) = e(n + 1)$$

$(e(n))_n$  est donc une suite géométrique de raison  $e(1)$  et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e(n) = e(1)^n$$

• Sur  $\mathbb{Z}$  :

Montrons que  $e(0) = 1$  :

$$e(0 + 0) = e(0) = e(0)^2$$

On a déjà écarté  $e(0) = 0$  donc :

$$e(0) = 1$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e(n).e(-n) = e(n - n) = e(0) = 1$$

Et comme  $e(n) \neq 0$  on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e(-n) = \frac{1}{e(n)} = \frac{1}{e(1)^n} = e(1)^{-n}$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, e(k) = e(1)^k$$

• Sur  $\mathbb{Q}$  :

Montrons la propriété sur les inverses. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$e(1) = e\left(\underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}}_{p \text{ fois}}\right) = e\left(\frac{1}{p}\right)^p$$

Donc :

$$e\left(\frac{1}{p}\right) = e(1)^{\frac{1}{p}}$$

Maintenant soit  $r \in \mathbb{Q}$  i.e.  $r = \frac{q}{p}$  avec  $q \in \mathbb{Z}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . On a alors :

$$e(r) = e\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{p}\right) = e\left(\frac{1}{p}\right)^q = (e(1)^{\frac{1}{p}})^q = e(1)^{\frac{q}{p}} = e(1)^r$$

Donc :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, e(r) = e(1)^r$$

• Sur  $\mathbb{R}$  :

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $\mathbb{Q}$  est dense<sup>3</sup> dans  $\mathbb{R}$ , on dispose d'une suite  $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  telle que  $r_n \rightarrow x$ . Comme  $e$  est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(r_n) = e\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n\right) = e(x)$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e(1)^{r_n}$$

Et par continuité de la fonction  $x \rightarrow e(1)^x$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(1)^{r_n} = e(1)^{\lim_n r_n} = e(1)^x$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, e(x) = e(1)^x$$

La réciproque d'une fonction logarithme est bien une fonction exponentielle.

### 3.2 Lier produit de convolution et produit

On cherche maintenant une fonction  $L$  telle que :

$$L(u * h) = L(u).L(h), \quad \text{càd} \quad L\left(\int_0^{+\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau\right) = L(u).L(h)$$

dès que cette intégrale a un sens.

On définit  $L(u)$ , la transformée de Laplace de  $u$ , de variable complexe<sup>4</sup>  $p$ , comme :

$$L(u)(p) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt$$

Insistons sur le fait que la transformée de Laplace d'une fonction est elle-même une fonction.

Pourquoi prendre une telle expression ? On peut essayer d'avoir l'intuition de cette expression avec le raisonnement suivant : Tout d'abord, prendre l'intégrale

---

3. cf notes de topologie.

4. En toute rigueur, la transformée de Laplace d'une fonction est une fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $A \subset \mathbb{R}$ , on définit sans difficulté  $\int_A f(x)dx = \int_A \text{Re}(f(x))dx + i \int_A \text{Im}(f(x))dx$ . Le lecteur ne souhaitant pas se soucier de cela pourra se limiter au cas  $p \in \mathbb{R}$ , qui est déjà très instructif.

de la convolution permet de transformer le produit de convolution en produit d'intégrales. De manière très informelle,

$$\int \left( \int u(\tau) u(t - \tau) d\tau \right) dt = \int u(t) dt \int u(\tau) d\tau$$

Cependant, dans ce cas, il faut que la fonction  $u$  soit intégrable. Il semble assez naturel d'essayer de "calmer" la fonction avec une fonction décroissante. Pourquoi alors choisir l'exponentielle ? Tout d'abord multiplier par une exponentielle décroissante permet d'intégrer de nombreuses fonctions. De plus, comme nous l'avons vu précédemment, l'exponentielle permet de passer de la somme au produit, ce qui permet toujours de réaliser la petite manipulation précédente, puisque

$$e^{-t} u(\tau) u(t - \tau) = e^{-(t-\tau)} u(t - \tau) \times e^{-\tau} u(\tau)$$

En prenant l'intégrale par rapport à  $t$  de la convolution, on pourra de nouveau séparer les intégrales et retrouver un produit. On peut ajouter un paramètre à l'exponentielle utilisée, et on retrouve l'expression donnée de la transformée de Laplace.

Vérifions maintenant que la transformée de Laplace transforme bien la convolution en produit :

$$\begin{aligned} L(u * h) &= L \left( \int_0^{+\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(\tau) h(t - \tau) e^{-pt} dt d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} u(\tau) \int_0^{+\infty} h(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} dt e^{-p\tau} d\tau \\ &= L(h) \int_0^{+\infty} u(\tau) e^{-p\tau} d\tau \\ &= L(h).L(u) \end{aligned}$$

**Remarque :** La transformée de Laplace est généralement notée au moyen d'une lettre majuscule. Par exemple, on noterait  $L(h) = H$ .

### 3.3 Propriétés très générales

(i) Dérivation :

$$L(f')(p) = f(0) + pL(f)(p)$$

*Démonstration :* on sait que

$$L(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt$$

Par intégration par parties on obtient :

$$L(f')(p) = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-pe^{-pt})dt = f(0) + pL(f)(p)$$

On suppose que dans les cas qui nous intéressent

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} = 0,$$

d'où  $L(f')(p) = pL(f)(p)$  : “dériver c'est multiplier par  $p$ ”.

(ii) Intégration :

$$L(f f)(p) = \frac{1}{p} L(f)$$

*Démonstration :* encore une fois par intégration par parties :

$$L(f f)(p) = \left[ (f f)(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-pt}}{-p} dt = \frac{1}{p} L(f)(p)$$

On suppose encore une fois que, dans notre cas,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(t) e^{-pt} = 0$$

(iii) Décalage : Soit  $\tau \geq 0$  et  $u_\tau$  définie par  $u_\tau(t) = u(t - \tau)$ .

D'une part on a,

$$L(u_\tau)(p) = \int_0^{+\infty} u_\tau(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} u(t - \tau) e^{-pt} dt$$

En effectuant le changement de variable  $\theta = t - \tau$  on a :

$$L(u_\tau)(p) = \int_0^{+\infty} u(\theta) e^{-p(\theta+\tau)} d\theta = e^{-p\tau} L(u)(p)$$

Décaler de  $\tau$  revient à multiplier par une exponentielle (ici on devrait intégrer depuis  $-\tau$ , mais comme  $u$  est nulle sur  $\mathbb{R}_-$  on peut intégrer depuis 0).

D'autre part, on a  $u_\tau = u * \delta_\tau$  car :

$$(u * \delta_\tau)(t) = \int_0^{+\infty} \delta_\tau(x) u(t - x) dx = u(t - \tau)$$

Ainsi on a :

$$L(u_\tau) = L(u * \delta_\tau) = L(u) \cdot L(\delta_\tau)$$

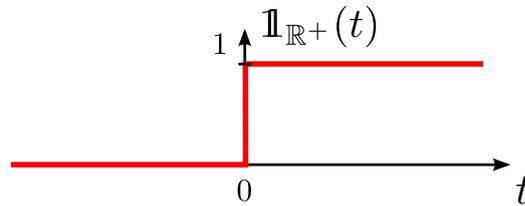
Et donc :

$$L(\delta_\tau)(p) = e^{-p\tau}$$

### 3.4 Exemples usuels

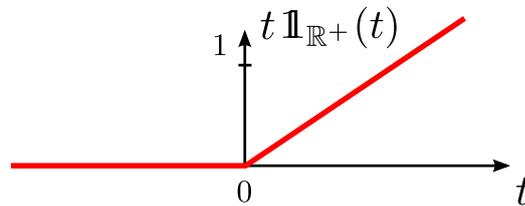
(i) Les Diracs :  $L(\delta) = 1$  et  $L(\delta_\tau) = e^{-p\tau}$ .

(ii) Échelons : La représentation d'un échelon est :



C'est l'intégrale d'un Dirac. Ainsi,  $L(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}) = \frac{1}{p}$

(iii) Fonctions du type :



C'est l'intégrale de la fonction précédente. Ainsi :  $L(t \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}) = \frac{1}{p^2}$

(iv) Plus généralement,  $L(\frac{t^n}{n!} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}) = \frac{1}{p^n}$

(v) Exponentielle :  $L(e^{\alpha t} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}) = \frac{1}{p-\alpha}$

(vi) Sinus :  $L(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

(vii) Cosinus :  $L(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$

Dans tout ce qui précède,  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$  est la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}_+$ , i.e. la fonction qui vaut 1 sur  $\mathbb{R}_+$  et qui est nulle autre part.

## 4 Applications et outils proches

### 4.1 Résolution d'équations différentielles

Essayons de trouver les solutions de l'équation :

$$\begin{cases} f''(t) + f(t) = \sin(2t) \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Avec un peu d'habitude, on sait que la solution est de la forme :

$$f(t) = (at + b) \sin(2t) + (ct + d) \cos(2t)$$

Même si on se souvient de la forme de la solution, il faut encore réaliser des calculs assez pénibles pour arriver à déterminer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . La transformée de Laplace permet de résoudre une telle équation *sans connaître la forme de la solution*, et au prix de calculs plus modestes.

Comme  $f(0) = f'(0) = 0$ , en passant à la transformée de Laplace, cette équation se transforme en :

$$p^2 F(p) + F(p) = L(\sin(2t))(p) = \frac{2}{p^2 + 4}$$

(En notant  $F(p) = L(f)(p)$  et d'après l'exemple (vi) de la partie précédente)

Ainsi, en isolant  $F(p)$ ,

$$F(p) = \frac{2}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)} = \frac{2}{(p + 2i)(p - 2i)(p + i)(p - i)}$$

Il s'agit alors de décomposer cette fraction en éléments simples. On obtient :

$$F(p) = \frac{1}{6} \frac{i}{p + 2i} - \frac{1}{6} \frac{i}{p - 2i} + \frac{1}{3} \frac{i}{p + i} - \frac{1}{3} \frac{i}{p - i}$$

On repasse alors par l'inverse de la transformée de Laplace et on a :

$$f(t) = \frac{1}{6i} e^{-2it} - \frac{1}{6i} e^{2it} + \frac{1}{3i} e^{-it} - \frac{1}{3i} e^{it}$$

On utilise alors la formule de De Moivre ( $\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{-i}$ ) et on obtient :

$$f(t) = \frac{1}{3} \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(t)$$

On a alors assez facilement pu résoudre cette équation.

Avec la transformée de Laplace on possède donc une méthode générale qui nous permet de résoudre plus simplement certaines équations différentielles :

1. On transforme l'équation différentielle à l'aide de la transformée de Laplace.
2. On résout l'équation algébrique obtenue, qui est souvent plus simple à résoudre.
3. On utilise la transformée de Laplace inverse pour retrouver les solutions.

## 4.2 Transformée en $Z$

### 4.2.1 Convolution dans $\mathbb{Z}$

En introduction, pour définir la convolution, nous étions partis d'un exemple en temps discret, puis étions passé en continu en faisant tendre le pas de temps vers 0. Il est cependant tout à fait possible de rester en temps discret, et de définir la convolution, qui s'appliquera alors à des suites.

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}$ , on définit  $u * v$ , la convolution de  $u$  et  $v$ , comme :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (u * v)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k] v[n - k]$$

quand cette somme converge.

Cette convolution a les mêmes propriétés que celles décrites dans le cas continu, et on peut appliquer exactement le même raisonnement qu'avant et se demander s'il existe un analogue de la transformée de Laplace dans le cas discret, qui pourrait transformer convolution en produit. Cet analogue existe bel et bien, et se nomme la transformée en  $Z$ .

### 4.2.2 Définition de la transformée en $Z$

On appelle transformée en  $Z$  de la suite  $u$  la fonction  $Z(u)$ , de variable complexe  $z$ , telle que :

$$Z(u)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u[n] z^{-n}$$

Encore une fois, on part de 0 et non de  $-\infty$  dans l'expression car le point de vue adopté considère des suites nulles en dessous d'un certain rang.

### 4.2.3 Quelques propriétés

La transformée en  $Z$  possède des propriétés analogues à celles de la transformée de Laplace, parmi celles-ci on trouve (sans démonstration) :

(i) Linéarité :  $Z(u + v) = Z(u) + Z(v)$

(ii) Décalage : soit  $k \geq 0$ . Alors,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $Z(u[\cdot - k])(z) = z^{-k} Z(u[\cdot])(z)$

(iii) Convolution :  $Z(u * v) = Z(u) \times Z(v)$

### 4.2.4 Utilisation

On a vu que la transformée de Laplace pouvait se révéler très utile pour résoudre certaines équations différentielles. De la même manière, la transformée en  $Z$  peut permettre de résoudre bien plus facilement certaines équations de récurrence. En appliquant la propriété de décalage au dessus, on peut transformer une équation de récurrence en une autre équation qui peut s'avérer plus simple à résoudre, puis prendre la transformée en  $Z$  inverse.

## 4.3 Lien avec les probabilités

Jusqu'à maintenant, nous avons introduit toutes les notions dans le contexte des systèmes dynamiques, et de l'automatique. Cependant, ces notions sont aussi très présentes dans le domaine des probabilités.

### 4.3.1 Convolution et probabilité

En probabilité, la convolution permet de donner la loi d'une somme de variables aléatoires réelles à densité. Ce résultat est au programme de BCSPT, et c'est sûrement pour cette application que vous avez déjà vu la convolution ! Plus formellement, soit  $X$  une variable aléatoire réelle, i.e. une fonction de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , un espace de probabilité, dans  $\mathbb{R}$ . On dit qu'elle admet une densité  $f$  si, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Prenons maintenant deux variables aléatoires réelles indépendantes,  $X$  et  $Y$ , de densités  $f$  et  $g$  respectivement. Alors  $X + Y$  admet une densité qui est  $h := f * g$ . Démontrons le :

En reprenant les notations au-dessus, notons  $V = X + Y$  et  $U = (X, Y)$ . Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $U$  admet une densité  $u : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ .

Calculons  $\mathbb{E}[\phi(V)]$  pour  $\phi$  une fonction quelconque<sup>5</sup>. Par transfert :

$$\mathbb{E}[\phi(V)] = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x+y) f(x) g(y) dx dy$$

En faisant le changement de variable :

$$\begin{cases} u &= x+y \\ v &= x \end{cases}$$

On obtient :

$$\mathbb{E}[\phi(V)] = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u) f(v) g(u-v) du dv$$

Et par Fubini :

$$\mathbb{E}[\phi(V)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(u) \left( \int_{\mathbb{R}} f(v) g(u-v) dv \right) du$$

Comme on a choisi  $\phi$  quelconque, cela prouve que  $\int_{\mathbb{R}} f(v) g(u-v) dv$  est la densité de  $V$ , c'est-à-dire que la densité de  $X+Y$  est  $f * g$ . Plus précisément, pour se ramener à la définition de la densité donnée au-dessus, il suffit de prendre  $\phi = \mathbf{1}_{]-\infty, x[}$ . Dans ce cas,  $\mathbb{E}[\phi(V)] = \mathbb{P}(V \leq x) = \int_{-\infty}^x (f * g)(t) dt$  et on a bien le résultat voulu.

### 4.3.2 Détermination des moments d'une loi

La transformée de Laplace permet de trouver de manière systématique et assez efficace les différents moments d'une loi positive. Pour rappel, on dit qu'une variable aléatoire  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  si  $\mathbb{E}[|X|^n]$  est finie. On voit qu'avoir un moment d'ordre 1 revient à avoir une espérance, et un moment d'ordre 2 une variance.

Lorsqu'une variable aléatoire positive  $X$  admet une densité  $f$ , on peut prendre la transformée de Laplace de cette densité :

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dt = \mathbb{E} [e^{-pX}] .$$

---

5. Une caractérisation équivalente du fait qu'une variable aléatoire réelle  $V$  admet une densité  $h$  est que, pour toute fonction *continue bornée*  $\phi$ ,  $\mathbb{E}(\phi(V)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) h(x) dx$ . On pourrait utiliser cette propriété pour définir ce qu'est une variable à densité, mais ici on va utiliser la définition donnée dans le texte. On considère donc pour l'instant une fonction  $\phi$  quelconque telle que l'intégrale a un sens.

On reconnaît alors la fonction génératrice des moments de  $X$ . Plus précisément, selon la convention usuelle, la fonction génératrice des moments est donnée, lorsqu'elle existe, par

$$M_X(t) = \mathbb{E} [e^{tX}], \quad t \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = L(f)(-t).$$

Justifions maintenant l'appellation "fonction génératrice des moments". Sans détailler ce qu'on appelle une fonction génératrice, montrons que l'on peut retrouver les moments de  $X$  à partir de  $M_X$  :

Si  $X$  admet un moment d'ordre 1, on admet qu'on peut alors dériver  $M_X$  par rapport à  $t$ , et qu'on peut dériver sous l'espérance, ce qui donne :

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = \mathbb{E} [X e^{tX}]$$

En prenant cette dérivée en 0, on obtient :

$$\frac{d}{dt} M_X(0) = \mathbb{E} [X]$$

On peut donc retrouver l'espérance de  $X$  en dérivant sa fonction génératrice des moments en 0. Plus généralement, si  $X$  admet un moment d'ordre  $n$ , elle est dérivable  $n$  fois en 0, et on a :

$$\frac{d^n}{dt^n} M_X(0) = \mathbb{E} [X^n]$$

Une fois la fonction génératrice des moments déterminée, il est généralement assez simple de la dériver plusieurs fois. Plutôt que de calculer directement de façon séparée l'espérance et la variance d'une loi, il peut être plus simple d'en prendre la transformée de Laplace et de la dériver 2 fois.

#### 4.4 Lien avec Fourier

La transformée de Laplace a un lien très fort avec un autre outil central des mathématiques : la transformée de Fourier. On définit la transformée de Fourier de  $f$ , notée  $\hat{f}$ , par

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

On voit donc qu'il existe deux différences entre la transformée de Fourier et la transformée de Laplace :

1. Avec la transformée de Laplace, on n'intègre que sur  $\mathbb{R}^+$ , alors qu'on intègre sur tout  $\mathbb{R}$  avec la transformée de Fourier. Néanmoins, ce n'est pas une différence majeure, et la *transformée de Laplace bilatérale*, avec laquelle on intègre sur tout  $\mathbb{R}$ , existe également.
2. Avec la transformée de Fourier, on se limite aux complexes de la forme  $p = it$ . En ce sens, la transformée de Laplace (bilatérale) généralise la transformée de Fourier.

Ce qu'il faut retenir, c'est que transformée de Laplace et transformée de Fourier sont deux outils très proches. Le choix de l'un ou l'autre dépendra surtout du problème précis ou du domaine d'étude : par exemple, en probabilité, la transformée de Fourier est très utilisée (la transformée de Fourier de la densité est ce qu'on appelle la fonction caractéristique) alors que la transformée de Laplace l'est beaucoup moins.